Финансовая академия при Правительстве РФ

Олимпиада по математике 2003

1. (7 баллов) Найти все пары натуральных чисел n и m, удовлетворяющих уравнению:

$$\frac{1}{2003} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\,.$$

2. (5 баллов) Вычислить:

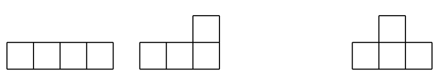
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}{e}\right)^x.$$

3. (9 баллов) Доказать, что не существует целых чисел a, b, c, d, e, удовлетворяющих системе равенств:

$$\begin{cases} abcde - a = \underbrace{11\ldots1}_{2003} \\ abcde - b = \underbrace{33\ldots3}_{2003} \\ abcde - c = \underbrace{55\ldots5}_{2003} \\ abcde - d = \underbrace{77\ldots7}_{2003} \\ abcde - e = \underbrace{99\ldots9}_{2003} \end{cases}.$$

4. (8 баллов) Пусть $f(x)$– дифференцируемая на отрезке $[0,1]$ функция. Докажите, что уравнение $(x - x^3)\cdot f'(x) = (3x^2 - 1)\cdot f(x)$ имеет хотя бы один корень.

5. (10 баллов) Квадратное поле разделено на 64 квадрата. Можно ли замостить это поле 15 фигурками типа 1 и одной фигуркой типа 2?



Тип 1 Тип 2

6. (8 баллов) Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2000} + \sqrt[n]{30} - 1)^n\,.$$

7. (5 баллов) Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_1^\infty \sqrt{x}\cdot e^{-x}dx\,.$$

8. (10 баллов) Даны 2 вектора $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$ в эвклидовом пространстве $\mathbf{R^2}$, про которые известно, что

$$\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}^T\cdot\mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

Доказать, что векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ взаимно ортогональны.

9. (3 балла) Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2003}.$$