Финансовая академия при Правительстве РФ

Олимпиада по математике 2004

1. (баллов)   Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2004} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-2004}, \quad \text{где} \quad i = \sqrt{-1}$$

2. (баллов)   Вычислить производную функции $f(x)$ в точке $x = 0$, где

$$f(x) = \frac{2x-1}{(x+2)(x+2^2)(x+2^3)\cdot\ldots\cdot(x+2^{2004})}$$

3. (баллов)   Найти сумму числового ряда:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots$$

4. (баллов)   Построить график функции:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5 - x^2 + 2\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{5 - x^2 - 2\sqrt{4-x^2}}\right).$$

5. (баллов)   Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ последовательности:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2004}{a_n}\right), \quad a_1 > 0.$$

6. (баллов)   На студенческом вечере ни один юноша не танцевал со всеми девушками, но при этом каждая девушка танцевала хотя бы с одним юношей. Докажите, что существуют такие две танцевавшие пары, что каждый юноша из одной пары не танцевал с девушкой из другой пары.

7. (баллов)   Найти наибольшее значение функции $f(x, y, z, u) = x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot u$, при условии, что $2 \cdot x + x \cdot y + z + y \cdot z \cdot u = 1$ и $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad u \geq 0$.