

Финансовая академия при Правительстве РФ

Олимпиада по математике 2005

1. (5 баллов) Сколько цифр в десятичной записи содержит число:

$$\int_0^{10} x^x (\ln x + 1) dx.$$

2. (7 баллов) Дана функция $f(x) = (2 - x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x)^{-1}$.

Вычислить $f^{(2005)}(1)$.

3. (9 баллов) Найти сумму числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 - n + 1}.$$

4. (5 баллов) Построить график функции:

$$f(x) = \int_0^1 |t - x| dt.$$

5. (9 баллов) Функция $f(x)$ определена на \mathbf{R} . Известно, что для $\forall x$ и $\forall h > 0$ выполняется неравенство: $|f(x+h) - f(x-h)| < h^2$. Вычислить $f(\pi) - f(e)$.

6. (7 баллов) Вычислить e^A , где $A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$. Напомним, что

$$e^X = E + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \dots + \frac{X^n}{n!} + \dots$$

7. (5 баллов) На калькуляторе цифры расположены следующим образом:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Докажите, что любое четырёхзначное число, набираемое по ходу часовой стрелки (или против хода ч. с.) из цифр, расположенных в углах любого прямоугольника (например, 4125, 7128, 9658, 7887.), делится на 11.