Финансовая академия при Правительстве РФ

Олимпиада по математике 2007

1. (5 баллов) Вычислить:

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

2. (4 балла) Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2007}\cdot\sqrt[2\cdot 3]{2007}\cdot\sqrt[3\cdot 4]{2007}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n\cdot(n+1)]{2007}\right).$$

3. (7 баллов) Найти сумму числового ряда:

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}+\ldots.$$

4. (7 баллов) Найти определитель матрицы X, если известно, что

$$X\cdot X^T=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}.$$

5. (9 баллов) Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^1 \min_{y\in[0,1]}\left(2x+|2x-y|\right)dx\,.$$

6. (7 баллов) Доказать, что для любых чисел a, b и c больших единицы, справедливо неравенство:

$$2\left(\frac{\log_b a}{b+a}+\frac{\log_c b}{c+b}+\frac{\log_a c}{a+c}\right)\ \geq\ \frac{9}{a+b+c}\,.$$

7. (6 баллов) Доказать, что матричное уравнение

$$X^2+2X=8E,\qquad \text{где } E\text{– единичная матрица,}$$

имеет на множестве квадратных матриц 2007-го порядка по крайней мере 2^{2007} решений.