

Олимпиада по математике 2003

Победители 2003:

I место	Матиива Ксения	У 1-3	43 балла
II место	Тюльпин Денис	АУ 1-2	29 баллов
III место	Толстик Алексей	К 1-2	23 балла

1. (7 баллов) Найти все пары натуральных чисел n и m , удовлетворяющих уравнению:

$$\frac{1}{2003} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Решение:

$$\frac{1}{2003} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leftrightarrow n = \frac{2003m}{m-2003} = \frac{2003m - 2003^2 + 2003^2}{m-2003} = 2003 + \frac{2003^2}{m-2003}$$

Так как 2003 простое число, то последняя дробь будет целым тогда и только тогда, когда: $m - 2003 = \pm 1$; $m - 2003 = \pm 2003$; $m - 2003 = \pm 2003^2$. При отрицательных значениях $m - 2003$ натуральных решений нет, поэтому остаются три случая: $m = 2004, n = 2003 \cdot 2004$; $m = 4006, n = 4006$; $m = 2004 \cdot 2003, n = 2004$.

2. (5 баллов) Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}{e} \right)^x$.

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}{e} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \left(\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)^x}{e} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(\ln \left(\frac{x+1}{x} \right)^x - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) - 1 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \left(1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2} + o(1)} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

3. (9 баллов) Доказать, что не существует целых чисел a, b, c, d, e , удовлетворяющих системе равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} abcde - a = \underbrace{11 \dots 1}_{2003} \\ abcde - b = \underbrace{33 \dots 3}_{2003} \\ abcde - c = \underbrace{55 \dots 5}_{2003} \\ abcde - d = \underbrace{77 \dots 7}_{2003} \\ abcde - e = \underbrace{99 \dots 9}_{2003} \end{array} \right. .$$

Решение: Пусть целые числа a, b, c, d, e существуют. Так как $a(bcde - 1) = 11 \dots 1$ – нечетное, то a – нечетное. Аналогично, b, c, d, e – нечетные числа. Значит $abcde$ – нечетное, а $(abcde - a)$ – четное число ?!. Противоречие.

4. (8 баллов) Пусть $f(x)$ – дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$ функция. Докажите, что уравнение $(x - x^3) \cdot f'(x) = (3x^2 - 1) \cdot f(x)$ имеет хотя бы один корень.

Решение: Рассмотрим функцию $F(x) = (x - x^3)f(x)$. Эта функция дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, причем:

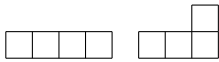
1. $F'(x) = (x - x^3)f'(x) - (3x^2 - 1)f(x)$,
2. $F(0) = F(1) = 0$.

Значит функция $F(x)$ на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, т.е. существует такая точка $x_0 \in (0, 1)$, в которой $F'(x_0) = 0$, т.е.

$$(x_0 - x_0^3)f(x_0) - (3x_0^2 - 1)f(x_0) = 0,$$

для любой дифференцируемой на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x)$. Что и требовалось доказать.

5. (10 баллов) Квадратное поле разделено на 64 квадрата. Можно ли замостить это поле 15 фигурками типа 1 и одной фигуркой типа 2?



Тип 1



Тип 2

Решение: Раскрасим поле в два цвета по типу шахматной доски. На этом поле 32 черных и 32 белых квадрата. Если бы удалось замостить поле фигурами, то в фигурах первого типа будет раскрашено два белых и два черных квадрата (в сумме четное число черных и белых), в фигуре второго типа будет раскрашено либо 3 черных и 1 белый, либо наоборот (нечетное число черных и белых). Противоречие.

6. (8 баллов) Найти предел: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2000} + \sqrt[n]{30} - 1)^n$.

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2000} + \sqrt[n]{30} - 1)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{\ln 2000}{n}} + e^{\frac{\ln 30}{n}} - 1)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln 2000}{n} + 1 + \frac{\ln 30}{n} - 1\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\ln 60000}{n}\right)^n = e^{\ln 60000} = 60000. \end{aligned}$$

7. (5 баллов) Исследовать на сходимость несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx.$$

Решение: Воспользуемся теоремой сравнения несобственных интегралов:

$$0 < \sqrt{x}e^{-x} \leq xe^{-x},$$

при $x \geq 1$, значит

$$\int_1^{\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x} dx \leq \int_1^{\infty} x \cdot e^{-x} dx.$$

Но интеграл в правой части неравенства сходится, и даже находится:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} x \cdot e^{-x} dx &= \quad \text{где } x = u, dx = du; \quad e^{-x} dx = dv, -e^{-x} = v \quad \text{где } = \\ &= -xe^{-x}|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e} - e^{-x}|_1^{\infty} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Поэтому интеграл и в левой части неравенства сходится.

8. (10 баллов) Даны 2 вектора $\mathbf{A} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{B} = (b_1, b_2)$ в евклидовом пространстве \mathbf{R}^2 , про которые известно, что

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} = E.$$

Доказать, что векторы \mathbf{A} и \mathbf{B} взаимно ортогональны.

Решение: Дано:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot (b_1 \ b_2) = E \quad (1)$$

Если вектор $\mathbf{A} = 0$, то доказывать нечего. Пусть $\mathbf{A} \neq 0$. Умножим равенство (1) на столбец $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, получим:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot (b_1 \ b_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot (a_1^2 + a_2^2) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot (b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \dots$$

Теперь если \mathbf{A} и \mathbf{B} линейно зависимы, то $a_1^2 + a_2^2 = 0$ и $\mathbf{A} = 0$, но мы этот случай исключили. Значит \mathbf{A} и \mathbf{B} линейно независимы, но тогда, в силу единственности разложения, $b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 = 0$ т.е. \mathbf{A} и \mathbf{B} ортогональны.

9. (3 балла) Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2003}.$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2003} = \begin{pmatrix} 1 & -2003 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$