Олимпиада по математике 2004

Победители 2004:

I место	Борусяк Кирилл	МЭК 1-1	35 баллов
II место	Шашков Александр	МЭК 1-2	29 баллов
III место	Мешкова Анна	Ф 1-3	24 балла

1. (4 балла) Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}^{10200401} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-10200401}, \quad \text{где} \quad i = \sqrt{-1}\,.$$

Решение: Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$, тогда

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

значит $A^4 = E$. Поскольку $10200401 = 2550100 \cdot 4 + 1$, то $A^{10200401} = (A^4)^{2550100} \cdot A = A$. Далее, из равенства (1) следует, что $A \cdot (-A) = E \Leftrightarrow A^{-1} = -A$. Поэтому, $A^{-10200401} = (-A)^{10200401} = ((-A)^4)^{2550100} \cdot (-A) = -A$. Окончательно,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}^{10200401} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-10200401} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (5 баллов) Вычислить производную функции $f(x)$ в точке $x = 0$, где

$$f(x) = \frac{2x - 1}{(x+2)(x+2^2)(x+2^3) \cdot \ldots \cdot (x+2^{2004})}\,.$$

Решение:

Рассмотрим функцию $g(x) = (x+2)(x+2^2)(x+2^3) \cdot \ldots \cdot (x+2^{2004})$. $g(0) = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2004} = 2^{1+2+3+\ldots+2004} = 2^{2009010}$. Далее,

$$g'(x) = (x+2)'(x+2^2)(x+2^3) \cdot \ldots \cdot (x+2^{2004}) + (x+2)(x+2^2)'(x+2^3) \cdot \ldots \cdot (x+2^{2004}) +$$
$$(x+2)(x+2^2)(x+2^3)' \cdot \ldots \cdot (x+2^{2004}) + \ldots + (x+2)(x+2^2)(x+2^3) \cdot \ldots \cdot (x+2^{2004})' =$$
$$(x+2^2)(x+2^3) \cdot \ldots \cdot (x+2^{2004}) + (x+2)(x+2^3) \cdot \ldots \cdot (x+2^{2004}) +$$
$$(x+2)(x+2^2)(x+2^4) \cdot \ldots \cdot (x+2^{2004}) + \ldots + (x+2)(x+2^2)(x+2^3) \cdot \ldots \cdot (x+2^{2003}).$$

Теперь,

$$g'(0) = 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2004} + 2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2004} + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot \ldots \cdot 2^{2004} + \ldots + 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2003} =$$
$$\frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2004}}{2} + \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2004}}{2^2} + \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2004}}{2^3} + \ldots +$$
$$\frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2004}}{2^{2003}} + \frac{2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{2004}}{2^{2004}} = g(0)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2004}}) =$$
$$g(0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{2004}}}{1 - \frac{1}{2}} = g(0)(1 - 2^{-2004}).$$

Теперь найдём $f'(x)$: $f'(x) = \frac{2 \cdot g(x) - (2x-1)g'(x)}{g^2(x)}$, значит

$$f'(0) = \frac{2 \cdot g(0) + g'(0)}{g^2(0)} = \frac{2 \cdot g(0) + g(0)(1 - 2^{-2004})}{g^2(0)} = \frac{2 + 1 - 2^{-2004}}{g(0)} = \frac{3 - 2^{-2004}}{2^{1002} \cdot 2^{2005}}.$$

3. (7 баллов) Найти сумму числового ряда:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots .$$

Решение: Нетрудно убедиться, что исходный ряд является сходящимся, применив признак Даламбера. Обозначим сумму ряда через S. Далее

$$S = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{2+1}{2^2} + \frac{2+3}{2^3} + \frac{2+5}{2^4} + \ldots + \frac{2+2n-3}{2^n} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2n-3}{2^n} + \ldots .$$

Заметим, что второй, четвёртый, шестой, и т. д., члены последовательности образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 1/2. Перегруппируем ряд следующим образом, первый член оставим без изменения, далее запишем геометрическую прогрессию, а затем, остальные члены ряда. Такая перегруппировка допустима, т. к. исходный ряд и геометрическая прогрессия сходятся. Имеем:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2n-3}{2^n} + \ldots =$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \ldots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}} + \ldots =$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n} + \ldots) = .$$

Видим, что выражение в скобках есть исходный ряд, поэтому справедливо равенство:

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \cdot S \Leftrightarrow S = 3.$$

4. (4 балла) Построить график функции:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5-x^2+2\sqrt{4-x^2}}+\sqrt{5-x^2-2\sqrt{4-x^2}}\right).$$

Решение: Преобразуем функцию $f(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-x^2+2\sqrt{4-x^2}+1}+\sqrt{4-x^2-2\sqrt{4-x^2}+1}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{(\sqrt{4-x^2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{4-x^2}-1)^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-x^2}+1+|\sqrt{4-x^2}-1|\right)$$

Функция определена на множестве $-2\le x\le 2$. Раскроем подмодульное выражение:

$$|\sqrt{4-x^2}-1|=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}-1, & \text{при } x^2\le 3\\ -\sqrt{4-x^2}+1, & \text{при } x^2>3\end{cases}.$$

Получим:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sqrt{4-x^2}+1+\sqrt{4-x^2}-1) = \sqrt{4-x^2}, & \text{при } -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\ \frac{1}{2}(\sqrt{4-x^2}+1-\sqrt{4-x^2}+1) = 1, & \text{при } x\in(-2,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)\end{cases}$$

Строим окончательный график.

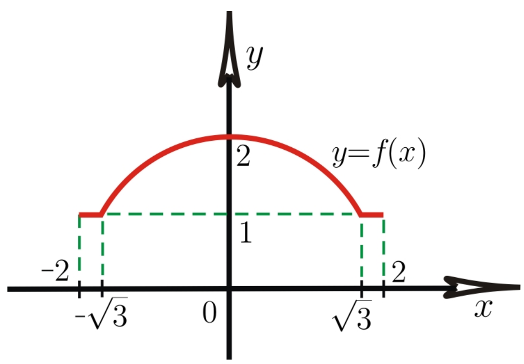

Рис. 1: искомый график

5. (7 баллов) Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ последовательности:

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{2004}{a_n}\right),\quad a_1>0.$$

Решение: Воспользуемся неравенством Коши: $\sqrt{a\cdot b}\leq \dfrac{a+b}{2}$, имеем при $n>1$:

$$\frac{1}{2}\Big(a_n+\frac{2004}{a_n}\Big)\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{2004}{a_n}}=\sqrt{2004}$$

можно считать, что $a_n^2\geq 2004$. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу, покажем, что она убывающая при $n>1$:

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(a_n+\frac{2004}{a_n}\Big)\leq\frac{1}{2}\Big(a_n+\frac{a_n^2}{a_n}\Big)=a_n\,.$$

Убывающая ограниченная последовательность имеет предел. Кроме. этого, если неравенства превращаются в равенства для некоторого члена последовательности $a_n\Leftrightarrow a_n=\sqrt{2004}$, то $a_{n+1}=a_{n+2}=a_{n+3}=\ldots=\sqrt{2004}\,$.

6. (5 баллов) На студенческом вечере ни один юноша не танцевал со всеми девушками, но при этом каждая девушка танцевала хотя бы с одним юношей. Докажите, что существуют такие две танцевавшие пары, что каждый юноша из одной пары не танцевал с девушкой из другой пары.

Решение: Выберем юношу Y_1, который танцевал с наибольшим количеством девушек, но не танцевал с девушкой D_2. По условию задачи, есть юноша Y_2, который танцевал с D_2. Если бы юноша Y_2 танцевал со со всеми девушками, с которыми танцевал Y_1, то у Y_2 партнёрш было бы больше, что противоречит выбору Y_1. Поэтому, существует такая девушка D_1, с которой танцевал Y_1, но не танцевал Y_2.

7. (8 баллов) Найти наибольшее значение функции $f(x,y,z,u)=x^2\cdot y^2\cdot z^2\cdot u$, при условии, что $2\cdot x+x\cdot y+z+y\cdot z\cdot u=1$ и $x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad z\geq 0,\quad u\geq 0.$

Решение: Воспользуемся обобщённым неравенством Коши:

$$\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot d}\leq\frac{a+b+c+d}{4}\,,$$

имеем:

$$\sqrt[4]{2x^2\cdot y^2\cdot z^2\cdot u}=\sqrt[4]{2x\cdot xy\cdot z\cdot yzu}\leq\frac{2x+xy+z+xyz}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x,y,z,u)=x^2\cdot y^2\cdot z^2\leq\frac{1}{512}\,.$$

Из приведённого выше неравенства следует, что f ограничена значением $1/512$, покажем, что оно достигается. Неравенство Коши превращается в равенство, при

$2x=xy=z=yzu=1/4$, т. е. $2x=1/4\Leftrightarrow x=1/8$, $xy=1/4\Leftrightarrow y=2$, $z=1/4$, $yzu=1/4\Leftrightarrow u=1/2$.