Олимпиада по математике 2005

Победители 2005:

I место	Кислицын Евгений	К 1-6	33 балла
II место	Помелов Артём	К 1-2	30 баллов
III место	Саватеева Марина	АУ 2-3	26 баллов
	Шкляев Леонид	МЭК 1-2	25 баллов

1. (5 баллов) Сколько цифр в десятичной записи содержит число:

$$\int\limits_0^{10} x^x\,(\ln x + 1)\,dx\,.$$

Решение:

Заметим, что $\left(x^x\right)' = (e^{x\,\ln x})' = e^x\,(\ln x + 1)\,.$ Значит,

$$\int\limits_0^{10} x^x\,(\ln x + 1)\,dx = \int\limits_0^{10} d(x^x) = x^x|_0^{10} = 10^{10} - \lim_{x\to 0+} x^x = 10^{10} - \lim_{x\to 0+} e^{x\,\ln x} =$$

$$= 10^{10} - e^{\lim\limits_{x\to 0+}(x\,\ln x)} = 10^{10} - e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}} =$$

$$\text{(по правилу Лопиталя)} = 10^{10} - e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}} = 10^{10} - e^{\lim\limits_{x\to 0+}(-x)} = 10^{10} - 1 =$$

$$= \underbrace{999\ldots9}_{10\ \text{цифр}}\ .$$

Ответ: 10 цифр.

2. (7 баллов) Дана функция $f(x) = (2 - x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x)^{-1}$.
Вычислить $f^{(2005)}(1)\,.$

Решение:

$$f(x) = (2 - x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x)^{-1} = \frac{1}{1-(x-1)^5}\,.$$

Рассмотрим сумму бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \ldots + t^n + \ldots\,, |t| < 1 \quad (*).$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в точке $x = 1$ (по степеням $(x-1)$), положив в равенстве (*) $t = (x-1)^5$:

$$\frac{1}{1-(x-1)^5} = 1+(x-1)^5+(x-1)^{10}+\ldots+(x-1)^{2000}+(x-1)^{2005}+(x-1)^{2010}+\ldots, |(x-1)^5| < 1\,.$$

Заметим, что $f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = f^{(4)}(1) = 0$, а $f^{(5)}(1) = 5!$, $f^{(10)}(1) = 10!$. Аналогично, $f^{(2005)}(1) = 2005!$, поскольку производные всех слагаемых степени ниже 2005 будут равны нулю при дифференцировании, а производные всех слагаемых степени выше 2005, будут равны нулю при подстановке $x = 1$.

Ответ: $f^{(2005)}(1) = 2005!$

3. (9 баллов) Найти сумму числового ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2-n+1}\,.$$

Решение:

В формуле $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, положив

$x = \operatorname{tg}\alpha \;\Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arctg} x$; $\quad y = \operatorname{tg}\beta \;\Leftrightarrow \beta = \operatorname{arctg} y$, получим:

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+x\,y} \qquad (**)\,.$$

Рассмотрим частичные суммы ряда:

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2-n+1} = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{arctg} \frac{n-(n-1)}{1+n\,(n-1)} = \sum_{n=1}^{N} (\operatorname{arctg} n - \operatorname{arctg}(n-1)) =$$
$$= \operatorname{arctg} N - \operatorname{arctg}(N-1) + \operatorname{arctg}(N-1) - \operatorname{arctg}(N-2) + \ldots +$$
$$+ \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} N\,.$$

Мы воспользовались формулой (**), положив $x = n$, а $y = n-1$. Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2-n+1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2-n+1} = \lim_{N\to\infty} \operatorname{arctg} N = \frac{\pi}{2}\,.$$

Ответ: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2-n+1} = \frac{\pi}{2}\,.$

4. (5 баллов) Построить график функции:

$$f(x) = \int_0^1 |t-x|\,dt\,.$$

Решение:

1) Пусть $x \le 0$, тогда $f(x) = \int\limits_0^1 |t-x|\,dt = \int\limits_0^x (t-x)\,dt = (\frac{t^2}{2} - x\,t)|_0^1 = -x + \frac{1}{2}$,

2) пусть $0 < x \le 1$, тогда $f(x) = \int\limits_0^1 |t-x|\,dt = \int\limits_0^x (x-t)\,dt + \int\limits_x^1 (t-x)\,dt = (x\,t - \frac{t^2}{2})|_0^x + (\frac{t^2}{2} - x\,t)|_x^1 = x^2 - x + \frac{1}{2}$.

3) пусть $x > 1$, тогда $f(x) = \int\limits_0^1 |t-x|\,dt = \int\limits_0^x (x-t)\,dt = (x\,t - \frac{t^2}{2})|_0^1 = x - \frac{1}{2}$.

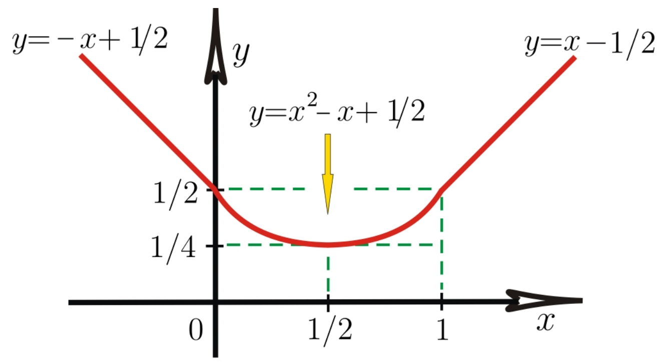

Рис. 1: искомый график

5. (9 баллов) Функция $f(x)$ определена на $\mathbf{R}$. Известно, что для $\forall x$ и $\forall h > 0$ выполняется неравенство: $|f(x+h) - f(x-h)| < h^2$. Вычислить $f(\pi) - f(e)$.

Решение:

Пусть $t = x - h, \quad \Delta t = 2h$. Тогда:

$$|f(t+\Delta t) - f(t)| < \frac{(\Delta t)^2}{4} \Leftrightarrow -\frac{(\Delta t)^2}{4} < f(t+\Delta t) - f(t) < \frac{(\Delta t)^2}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{\Delta t}{4} < \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} < \frac{\Delta t}{4}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \ \forall\, \Delta t > 0.$$

Перейдём к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta t}{4}\right) \le \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \le \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \le f'(t) \le 0 \ \Leftrightarrow \ f'(t) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(t) = C = const, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Значит, $f(\pi) - f(e) = C - C = 0$

Ответ: $f(\pi) - f(e) = 0$

6. (7 баллов) Вычислить e^A, где $A = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$. Напомним, что $e^X = E + X + \dfrac{X^2}{2!} + \dfrac{X^3}{3!} + \ldots + \dfrac{X^n}{n!} + \ldots$.

Решение:

I способ (для тех, кто помнит линейную алгебру)

Нетрудно заметить, что $\left(C^{-1}\cdot A\cdot C\right)^n = C^{-1}\cdot A^n\cdot C$ для любых матриц A и C. Из этого равенства и представления e^X следует, что

$$e^{C^{-1}\cdot A\cdot C} = C^{-1}\cdot e^A\cdot C, \qquad \mathrm{e}^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные значения матрицы A:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\pi \\ \pi & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\pi\, i$$

Значит существует такая матрица перехода C, для которой выполняется равенство:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = C^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \pi\, i & 0 \\ 0 & -\pi\, i \end{pmatrix}\cdot C\,.$$

Тогда,

$$e^A = e^{C^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \pi\, i & 0 \\ 0 & -\pi\, i \end{pmatrix}\cdot C} = C^{-1}\cdot e^{\begin{pmatrix} \pi\, i & 0 \\ 0 & -\pi\, i \end{pmatrix}}\cdot C =$$
$$= C^{-1}\cdot\begin{pmatrix} e^{\pi\, i} & 0 \\ 0 & e^{-\pi\, i} \end{pmatrix}\cdot C = C^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы воспользовались формулой Муавра $e^{i\,\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$.

II способ (для тех, кто не помнит линейную алгебру)

Рассмотрим матрицу $B = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$. Тогда:

$$B^2 = \begin{pmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix},\ B^3 = \begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ -t^3 & 0 \end{pmatrix},\ B^4 = \begin{pmatrix} t^4 & 0 \\ 0 & t^4 \end{pmatrix},$$
$$B^5 = \begin{pmatrix} 0 & -t^5 \\ t^5 & 0 \end{pmatrix},\ B^6 = \begin{pmatrix} -t^6 & 0 \\ 0 & -t^6 \end{pmatrix},\ B^7 = \begin{pmatrix} 0 & t^7 \\ -t^7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$e^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} -t^2 & 0 \\ 0 & -t^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 0 & t^3 \\ -t^3 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+\frac{1}{4!}\begin{pmatrix} t^4 & 0 \\ 0 & t^4 \end{pmatrix} + \frac{1}{5!}\begin{pmatrix} 0 & -t^5 \\ t^5 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{6!}\begin{pmatrix} -t^6 & 0 \\ 0 & -t^6 \end{pmatrix} + \frac{1}{7!}\begin{pmatrix} 0 & t^7 \\ -t^7 & 0 \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - t^2/2! + t^4/4! - t^6/6! + \ldots & -t + t^3/3! - t^5/5! + t^7/7! + \ldots \\ t - t^3/3! + t^5/5! - t^7/7! + \ldots & 1 - t^2/2! + t^4/4! - t^6/6! + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Положим $t = \pi$, тогда:

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $e^A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

7. (5 баллов) На калькуляторе цифры расположены следующим образом:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

.

Докажите, что любое четырёхзначное число, набираемое по ходу часовой стрелки (или против хода ч. с.) из цифр, расположенных в углах любого прямоугольника (например, 4125, 7128, 9658, 7887.), делится на 11.

Решение:

Рассматриваемое число a имеет вид: $a = 1000\,a_1 + 100\,a_2 + 10\,a_3 + a_4$, $\quad a_i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}, i = 1, 2, 3, 4$; причём, нетрудно заметить, что $a_1 + a_3 = a_2 + a_4$. Имеем:

$a = (990 + 10)\,a_1 + (99 + 1)\,a_2 + 10\,a_3 + a_4 = 990\,a_1 + 99\,a_2 + 10\,(a_1 + a_3) + a_2 + a_4 = 990\,a_1 + 99\,a_2 + 11\,(a_1 + a_3) = 11\,(91\,a_1 + 9\,a_2 + a_3)$.

Таким образом, a делится на 11.