Олимпиада по математике 2006

Победители 2006:

I место	Овсянникова Анастасия	Ф 1-3	30 баллов
II место	Аландаров Роман	Ф 1-3	25 баллов
III место	Кузнецов Геннадий	К 2-6	24 балла

1. (8 баллов) Существует ли непрерывная на отрезке $[-1,1]$ функция $f(x)\not\equiv 0$, удовлетворяющая условию :

$$\int\limits_1^x f(t)\,dt = \int\limits_x^{x^2} f(t)\,dt, \quad \forall x\in[-1,1]\,?$$

Решение:

Продифференцировав исходное равенство, получим:

$$f(x) = 2x\,f(x^2) - f(x) \Leftrightarrow f(x) = x\,f(x) \Leftrightarrow x\,f(x) = x^2\,f(x^2)\,.$$

Положив, $g(x) = x\,f(x)$ получим равенство:

$$g(x) = g(x^2),\ \text{ причём } g(0) = 0\,.$$

Пусть $f(a) = c \neq 0$ в некоторой точке $a\in(-1,1)\setminus\{0\}$. Рассмотрим последовательность: $a_1 = a$, $a_2 = a^2$, $a_3 = a^4$, ..., $a_n = a^{2^{n-1}}$, ... стремящуюся к нулю. Имеем,

$$g(a) = g(a^2) = g(a^4) = \ldots = g(a^{2^{n-1}}) = g(a_n) = c\,,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = c\,.$$

С другой стороны, в силу непрерывности функции $g(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a^{2^{n-1}}) = g(0) = 0.$$

Противоречие, значит $g(a)\equiv 0$ для $\forall a\in(-1,1)\setminus\{0\}$. По непрерывности равенство продолжается в точки 1 и -1. Значит и $f(x)\equiv 0$ на отрезке $[-1,\,1]$.

Ответ: Такой функции не существует.

2. (6 баллов) При каких целых значениях p и q уравнение: $\;p\,x^3 - \dfrac{3x}{p-3} + 2006 - q = 0$ имеет ровно два различных действительных корня?

Решение:

Введём в рассмотрение функцию $f(x) = p\,x^3 - \dfrac{3x}{p-3} + 2006 - q$, которая будет равна нулю в двух точках, если $p \neq 0$, $x_{\min} \neq x_{\max}$ и $f(x) = 0$ в одной из этих точек.

Имеем,

$$f'(x) = 3p\,x^2 - \frac{3}{p-3} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -\dfrac{1}{\sqrt{p(p-3)}} \\ x_2 & = & \dfrac{1}{\sqrt{p(p-3)}} \\ p<0; & p>3 & \end{array}\right. .$$

Далее, должно выполняться условие:

$$\left[\begin{array}{l} f(x_1)=0 \\ f(x_2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcl} \dfrac{2}{\sqrt{p(p-3)^3}} & = & q-2006 \\ \dfrac{2}{\sqrt{p(p-3)^3}} & = & 2006-q \end{array}\right. .$$

При $p \leq -1$ и $p > 4$, $\left|\dfrac{2}{\sqrt{p(p-3)^3}}\right| < 1$ и исходная задача не имеет решения в целых числах. Значит, $p = 4$, а $q = 2005$ и $q = 2007$.

Ответ: $(p = 4,\ q = 2005)$ и $(p = 4,\ q = 2007)$.

3. (6 баллов) Число 2006 разложить на n положительных сомножителей так, чтобы сумма их обратных величин была наименьшей. Чему равна эта сумма?

Решение:

Воспользуемся обобщённым неравенством Коши:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

причём равенство достигается при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Имеем,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{2006}} .$$

Сумма обратных величин будет наименьшей при

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_2} = \ldots = \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \sqrt[n]{2006},$$

и равна $\dfrac{n}{\sqrt[n]{2006}}$.

4. (7 баллов) Сколько существует членов последовательности $\{a_n\}$:

$$a_n = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n} n\,,\ n = 1, 2, \ldots\,?$$

Решение:

Существование a_n равносильно

$$\begin{array}{lcll}
\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n-1} n & > & 0 & \Leftrightarrow \\
\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n-2} n & > & 1 & \Leftrightarrow \\
\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n-3} n & > & e & \Leftrightarrow \\
\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{n-1} n & > & e^e & \Leftrightarrow \\
\ldots & & & \\
n & > & e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}} & (n-2) \text{ раза}\,.
\end{array}$$

Последнее неравенство верно при $n = 1, 2, 3$. Покажем, что при $n \geq 4$ оно неверно.

Поскольку $e^x \geq 1+x$, то $e^{e^e} \geq 1+e^e > 5$, $\quad e^{e^{e^e}} \geq 1+e^{e^e} > 6$, $\quad \ldots,\quad e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}$ $(n-2)$ раза $> n$.

Ответ: Существует только 3 члена последовательности.

5. (4 балла) Существует ли действительная матрица X, удовлетворяющая уравнению:

$$X^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 6 & 1 & 7 \\ -4 & 5 & 8 \end{pmatrix}?$$

Решение:

Известно, что

$$|X^2| = |X| \cdot |X| = |X|^2.$$

Определитель матрицы в правой части равенства равен -344.

Значит $|X|^2 = -344$ и такой действительной матрицы X не существует.

6. (7 баллов) Найти предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \ldots + n^n}{n^n}\,.$$

Решение:

$$1=\frac{n^n}{n^n}\le\frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}\le\frac{n+n^2+n^3+\ldots+n^n}{n^n}=\frac{n(n^n-1)}{n-1}\cdot\frac{1}{n^n}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1\le\frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}\le\left(\frac{n^n-1}{n^n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\to 1 \text{ при } n\to\infty.$$

По свойству предела последовательности (теорема "о двух милиционерах"), имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^2+3^3+\ldots+n^n}{n^n}=1\,.$$

Ответ: 1.

7. (5 баллов) На минном поле спрятано 10 бомб. Цифры указывают сколько бомб примыкает к данной клетке. Требуется разминировать поле:

1		2	2	1
2				
		5		
1		4		
			4	

.

Решение:

1		2	2	1
2	✠	✠		✠
	✠	5	✠	✠
1		4	✠	✠
		✠	4	✠

.