Олимпиада по математике 2007

Победители 2007:

I место	Понурко Татьяна	К 1-3	33 балла
II место	Аристархов Михаил	МЭК 1-1	32 балла
III место	Петухов Максим	МЭК 1-1	28 баллов

1. (5 баллов) Вычислить:

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Решение:

Требуется найти матрицу $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \geq 0$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеем,

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc & = & 1 \\ b(a+d) & = & 2 \\ c(a+d) & = & 0 \\ d^2+bc & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = & \pm 1 \\ b & = & \pm 1 \\ c & = & 0 \\ d & = & \pm 1 \end{cases}.$$

В силу того, что $X \geq 0$, $a = b = d = 1$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (4 балла) Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2007} \cdot \sqrt[2\cdot 3]{2007} \cdot \sqrt[3\cdot 4]{2007} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n\cdot(n+1)]{2007}).$$

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2007} \cdot \sqrt[2\cdot 3]{2007} \cdot \sqrt[3\cdot 4]{2007} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n\cdot(n+1)]{2007}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (2007)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots} = \lim_{n\to\infty} (2007)^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}}.$$

Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \ldots = 1,$$

поскольку частичные суммы ряда $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$, при $n \to \infty$. Таим образом,

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2007} \cdot \sqrt[2\cdot 3]{2007} \cdot \sqrt[3\cdot 4]{2007} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n\cdot(n+1)]{2007}) = 2007^1\,.$$

Ответ: 2007.

3. (7 баллов) Найти сумму числового ряда:

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2} + \ldots\,.$$

Решение:

Заметим, что $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\pi/4$,

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2-2\,\cos\pi/4}}{2} = \frac{\sqrt{2\cdot 2\,\sin^2\pi/8}}{2} = \sin\pi/8,$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+2\,\cos\pi/4}}}{2} = \frac{\sqrt{2-2\,\cos\pi/8}}{2} = \frac{\sqrt{2\cdot 2\,\sin^2\pi/16}}{2} = \sin\pi/16.$$

Нетрудно доказать, что

$$\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}_{\text{всего } n \text{ корней}} = \sin\Big(\pi/2^{n+1}\Big)\,.$$

Исходный ряд, в этом случае, примет вид:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{16} + \ldots + \frac{\pi}{2^{n+1}} + \ldots = \pi\Big(\frac{1/4}{1-1/2}\Big) = \pi/2\,.$$

Ответ: $\pi/2$.

4. (7 баллов) Найти определитель матрицы X, если известно, что

$$X \cdot X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}.$$

Решение:

По свойствам определителей имеем: $|X\cdot X^T| = |X|\cdot|X^T| = |X|^2$. Теперь покажем, что определитель матрицы в правой части равенства равен 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} I \\ II-I \\ III-II \\ IV-III \\ V-IV \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \\ 0 & 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{r} I \\ II \\ III-II \\ IV-III \\ V-IV \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\,.$$

Значит $|X|^2 = 1$ и, следовательно, $|X| = \pm 1$.

Ответ: $|X| = \pm 1$.

5. (9 баллов) Вычислить интеграл:

$$\int\limits_0^1 \min_{y\in[0,1]} (2x + |2x-y|)\,dx\,.$$

Решение:

1) Пусть $0 \le y \le 2x$, тогда

$$\min_{y\in[0,\,1]}(2x+2x-y) = \min_{y\in[0,\,1]}(4x-y) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1/2, \\ 4x-1, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

2) Пусть $2x \le y \le 1$, тогда

$$\min_{y\in[0,\,1]}(2x+2x-y) = \min_{y\in[0,\,1]} y = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1/2, \\ \emptyset, & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Значит,

$$\int\limits_0^1 \min_{y\in[0,1]}(2x+|2x-y|)\,dx = \int\limits_0^{1/2} 2x\,dx + \int\limits_{1/2}^1 (4x-1)\,dx = x^2\Big|_0^{1/2} + (2x^2-x)\Big|_{1/2}^1 = 5/4\,.$$

Ответ: 5/4.

6. (7 баллов) Доказать, что для любых чисел a, b и c больших единицы, справедливо неравенство:

$$2\Big(\frac{\log_b a}{b+a} + \frac{\log_c b}{c+b} + \frac{\log_a c}{a+c}\Big) \ \ge\ \frac{9}{a+b+c}\,.$$

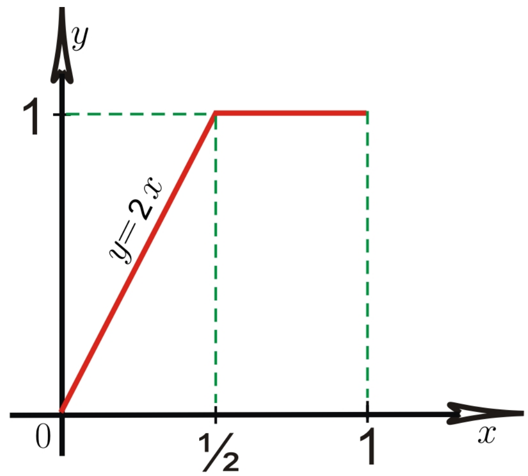

Рис. 1:

Решение:

Заметим, что из условия $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ следует, что $\log_b a > 0$, $\log_c b > 0$, $\log_a c > 0$.

Из неравенства Коши

$$x + y + z \ \geq \ 3 \cdot \sqrt[3]{x\,y\,z} \qquad \text{при } x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$$

с одной стороны следует, что

$$\frac{\log_b a}{b+a} + \frac{\log_c b}{c+b} + \frac{\log_a c}{a+c} \ \geq \ 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{\log_b a}{b+a} \cdot \frac{\log_c b}{c+b} \cdot \frac{\log_a c}{a+c}} = \frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\,.$$

С другой стороны, поскольку $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x\,y\,z}} \ \geq \ \dfrac{3}{x+y+z}$,

$$\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 3 \cdot \frac{3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{9}{2(a+b+c)}\,.$$

Значит, $2\left(\dfrac{\log_b a}{b+a} + \dfrac{\log_c b}{c+b} + \dfrac{\log_a c}{a+c}\right) \ \geq \ 2 \cdot \dfrac{9}{2(a+b+c)}\,.$

7. (6 баллов) Доказать, что матричное уравнение

$$X^2 + 2X = 8E, \qquad \text{где } E\text{– единичная матрица,}$$

имеет на множестве квадратных матриц 2007-го порядка по крайней мере 2^{2007} решений.

Решение:

Решение будем искать на множестве диагональных матриц. При этом матричное уравнение примет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{2007}^2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{2007} \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \Leftrightarrow$$

или

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x_1^2 & + & 2\,x_1 & - & 8 & = & 0 \\ x_2^2 & + & 2\,x_2 & - & 8 & = & 0 \\ x_3^2 & + & 2\,x_3 & - & 8 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ x_{2007}^2 & + & 2\,x_{2007} & - & 8 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{llllll} x_1 & = & 2; & x_1 & = & -4 \\ x_2 & = & 2; & x_2 & = & -4 \\ x_3 & = & 2; & x_3 & = & -4 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ x_{2007} & = & 2; & x_{2007} & = & -4 \end{array} \right. .$$

Диагональных матриц порядка 2007×2007 с различными наборами $\{2, -4\}$ на главной диагонали будет ровно 2^{2007}.